Musterlösung 2

1. a)

$$\begin{aligned}A &= \{(0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0)\}\\ B &= \{(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\\ &\qquad (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\}\\ C &= \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1),\\ &\qquad (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,0,1)\}\end{aligned}$$

b) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also

$$P[A] = \frac{|\,A\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\ P[B] = \frac{|\,B\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{11}{16} \text{ und } P[C] = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

2. a) Setze $A_1 \cup A_2 = A$ und verwende die Formel (1.2.14) des Skripts:

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A \cup A_3) = P(A) + P(A_3) - P(A \cap A_3)\\ &= P(A_3) + P(A_1 \cup A_2) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3).\end{aligned}$$

Schreibe $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = B \cup C$, wobei $B = A_1 \cap A_3$ und $C = A_2 \cap A_3$, und verwende (1.2.14) erneut:

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_3) + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)\\ - P(B) - P(C) + P(B \cap C)\end{aligned}$$

Wegen $B \cap C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, gilt dann:

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)\\ - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

Bemerkung: Dies ist ein Spezialfall (für $n = 3$) vom Prinzip der Inklusion und Exklusion, siehe Aufgabe **4.**.

Bitte wenden!

b) Definiere das Ereignis E_i = „Schalter R_i ist geschlossen". Die obige Formel ergibt dann:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ &\qquad - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= 0.6 + 0.55 + 0.5 - 3 \cdot 0.25 + 0.1 = 1. \end{aligned}$$

Bemerke, dass die Schalter *nicht* unabhängig sind.

3. **a)** Wir definieren $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^N$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, die Potenzmenge von Ω. Das Laplace Modell sagt, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, also $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Für $P(A_k)$ mit $1 \leq k \leq N$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{|A_k|}{|\Omega|} \\ &= \frac{|\{(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, 3, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_N) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\},\ 1 \leq i \leq N,\ i \neq k\}|}{6^N} \\ &= \frac{6 \cdots 6 \cdot 1 \cdot 6 \cdots 6}{6^N} = \frac{6^{N-1} \cdot 1}{6^N} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhalten wir $P(B_k) = 1/6$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{k=1}^{N} B_k^c, \\ B &= \bigcup_{k=1}^{N} A_k, \\ C &= \left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k \right) \cap \left(\bigcup_{l,m=1; l \neq m}^{N} (A_l \cap A_m) \right), \end{aligned}$$

wobei $\bigcup_{l,m=1;l\neq m}^{N} (A_l \cap A_m)$ das Ereignis ist, dass 3 mindestens zweimal erscheint (an Positionen l und m für $l \neq m$).

c) Wir erhalten unter Verwendung von **b)**, dass:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{N} B_k^c \right) = \frac{|\bigcap_{k=1}^{N} B_k^c|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdots 5}{6^N} = \left(\frac{5}{6} \right)^N, \\ P(B) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k \right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k \right)^c \right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{N} A_k^c \right) = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^N. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Es gilt:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^c\right)^c = \text{„Die 3 erscheint } N \text{ mal in } N \text{ Würfen“},$$

$$\bigcup_{i=1}^{N-2}(A_i \cap A_{i+1} \cap B_{i+2}) = \text{„Die Sequenz 336 erscheint mindestens einmal in } N \text{ Würfen“},$$

$$\bigcap_{i=1}^{N-1}(A_i \cup B_{i+1}) = \text{„Jedes Paar von zwei nachfolgenden Würfen hat links eine 3 oder rechts eine 6“}.$$

Bemerke, dass jedes Elementarereignis von $\bigcap_{i=1}^{N-1}(A_i \cup B_{i+1})$ die Form $(3, \dots, 3, \omega_k, 6, \dots, 6)$, mit $\omega_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $1 \leq k \leq N$, hat.

4. Im Fall $n = 1$ besagt die Formel $P[A_1] = P[A_1]$. Dies liefert uns schon die Induktionsverankerung.

Für den Induktionsschritt brauchen wir explizit den Fall $n = 2$. Wegen der disjunkten Zerlegung

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$$

gilt (Formel (1.2.14) im Skript)

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1 \setminus A_2] + P[A_2 \setminus A_1] + P[A_1 \cap A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2].$$

Wir nehmen also an, die Formel stimme für Werte bis n. (1.2.14) ergibt

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] + P[A_{n+1}] - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right].$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung haben wir nun

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}]$$

Bitte wenden!

und

$$
\begin{aligned}
P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right] &= P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P[(A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{i_k} \cap A_{n+1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}] \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}].
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] + P[A_{n+1}] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}].
\end{aligned}
$$